L. El Mezzeria A.S :2005/2006

Devoir de synthèse N°3

Classe : $4^{ème}$ sc

Durée : 3.H

EXERCICE N°1 (4 pts)

La taille moyenne d'un enfant entre 6 et 33 mois est donnée par le tableau suivant :

X	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33
Y	66	71	74	77	80	83	85	88	90	92

Où X désigne l'âge exprimé en mois, et Y désigne la taille exprimée en cm.

1/ Calculer $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ puis cov(X,Y).

2/a) Calculer le cœfficient de corrélation linéaire du couple (X, Y).

b) Interpréter le résultat obtenu.

3/ Déterminer une équation cartésienne de la droite de régression de Y en X.

4/ Déterminer la taille moyenne d'un enfant de 3 ans.

EXERCICE N°2 (6 pts)

L'espace ξ étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on désigne par S l'ensemble des points M(x,y,z) tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 5 = 0$

1/ Montrer que S est une sphère de centrer $\Omega(0,2,0)$ et de rayon 3.

2/ Soit P le plan dont une équation cartésienne est : $2x - 2y + z - 2 = 0$

Déterminer la position relative de S et P. Caractériser $S \cap P$.

3/ Soit P_m le plan dont une équation cartésienne est :

$$2mx + (1 - 2m)y + mz + 1 - 2m = 0$$

a) Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 \quad ; \quad \lambda \in IR \\ z = -2\lambda \end{cases}$$

Vérifier que la droite Δ est incluse dans P_m

b) Calculer la distance $d(\Omega, P_m)$ du point Ω au plan P_m.

c) Déterminer m pour que le plan P_m soit tangent à la sphère S.

Préciser les coordonnées du point de contact.

Problème (10pts)

I- Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x)=e^x - x - 1$

1/ Etudier le sens de variation de g.

2/ Déduire que pour tout réel x on a $g(x) \geq 0$.

II- Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = xe^x - 2e^x + x$.

On désigne par (ζ_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1/ Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Interpréter graphiquement les résultats.

2/a) Montrer que la droite Δ d'équation y = x est une asymptote oblique à la courbe (ζ_f) au voisinage de $-\infty$

b) Etudier la position relative de (ζ_f) et Δ

3/a) Montrer que $f'(x) = e^x g(-x)$. En déduire que pour tout x de IR : $f'(x) \geq 0$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Déterminer une équation de la tangente (T) à (ζ_f) au point d'abscisse 0.

4/ Tracer (T) , Δ et (ζ_f).

5/ Soit α un réel de l'intervalle $]-\infty, 2[$. On désigne par $A(\alpha)$ la mesure de l'aire du domaine du plan limité par (ζ_f), la droite Δ et les droites d'équation : $x = \alpha$ et $x = 2$.

a) Calculer à l'aide d'une intégration par parties $\int_{\alpha}^{2} xe^x \, dx$

b) Exprimer $A(\alpha)$ en fonction α

c) Montrer que $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} A(\alpha) = e^2$

III- Soit U la suite définie sur IN par $U_0=1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.

a) Montrer que pour tout n de IN on a $U_n < 2$

b) Montrer que U est une suite décroissant.

c) La suite U est elle convergente ?